1

FFI0132 - Vibrações e Ondas

Prof: Philippe W. Courteille

Monitor: Rafael Lima: rafael.bruno.lima@usp.br

Lista de exercícios 1

1. Um bloco de massa M está conectado por uma mola de massa desprezível e constante elástica k, inicialmente relaxada. O sistema desliza sobre uma superfície horizontal sem atrito. Então um deslocamento x é aplicado ao sistema, retirando-o de seu equilíbrio (desconsidere o comprimento natural da mola). Use as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$.

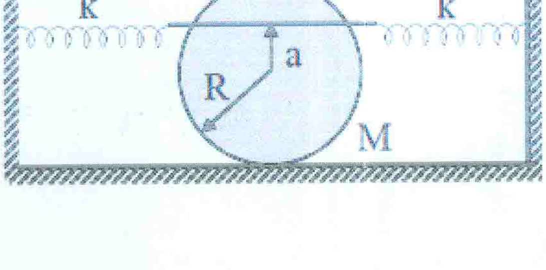
   a) Escreva e resolva a equação diferencial do sistema, encontrando a posição da massa M em função do tempo t, ou seja, $x(t)$ a partir da posição de equilíbrio. A resolução deve ser feita passo a passo. Dica: Como $x(t)$ deve ser uma solução real, use a propriedade $2Re[z] = z + z^*$.

   b) Faça a conexão entre as duas soluções possíveis $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ e $x(t) = B_1 \cos(\omega_0 t) + B_2 \sin(\omega_0 t)$. Como as constantes A, ϕ, B_1 e B_2 se relacionam entre elas e com as condições iniciais.

   c) Escreva a energia total do sistema, ou seja, a energia cinética e potencial e mostre que a mesma é constante em função do tempo.

2. Uma partícula de massa M está suspensa por uma mola de constante elástica k e comprimento natural l_0, cuja massa é desprezível. A partícula é solta em repouso, com a mola relaxada. Tomando o eixo de Oz orientado verticalmente para baixo, com origem no teto, calcule a posição $z(t)$ da partícula.

3. Considere um cilindro preso por duas molas que roda sem deslizar como mostra abaixo. Calcule a freqüência para pequenas oscilações do sistema. Dado que o momento de inércia é $I = MR^2/2$.



4. Uma bola de massa M cai de uma altura h sobre o prato de uma balança de mola e fica grudado. A constante da mola é k e as massas da mola e prato podem ser desprezíveis.

   a) Qual a amplitude de oscilação do prato?

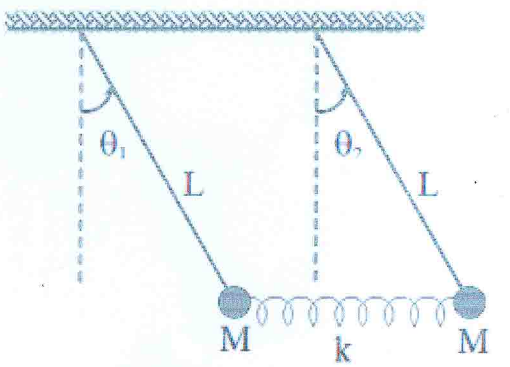
   b) Qual a energia total de oscilação?

5. Considere um sistema composto por dois pêndulos de massa M e comprimento L, acoplados por uma mola de constante elastica k, conforme a figura abaixo.

   a) Encontre as equações diferenciais para os ângulos θ_1 e θ_2.

   b) Definindo as coordenadas normais de vibração como $\alpha = \theta_1 - \theta_2$ e $\beta = \theta_1 + \theta_2$, encontre as equações diferenciais para α e β. Dica: some e subtraia as equações encontradas no item (a).

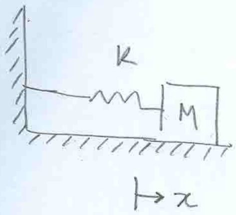
   c) Quais são as frequências angulares dos modos normais de vibração?



6. Uma bolinha de massa M e raio r rola sem deslizar sobre uma calha cilíndrica de raio $R \gg r$ com a condição de $\theta \ll 1$. Mostre que o movimento é harmônico simples e calcule a frequência algular ω_0.

Vibrações e Ondas : Lista 1

1)



$x(0) = x_0$
$\dot{x}(0) = v_0$

(a) $M\ddot{x} = -Kx$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = e^{pt}$$

$$p = \pm i\omega_0$$

$$\therefore x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}$$

$$Re[x(t)] = \frac{x(t) + x^*(t)}{2} = \frac{1}{2}\left(A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} + A_1^* e^{-i\omega_0 t} + A_2^* e^{i\omega_0 t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(A_1 + A_2^*)e^{i\omega_0 t} + (A_2 + A_1^*)e^{-i\omega_0 t}\right]$$

como $A_1 = A_2^* \Leftrightarrow A_1^* = A_2$ $\quad [\text{OBS: } A_1^* = (A_2^*)^* = A_2^*]$

$$A_1 \equiv A = r e^{i\varphi}$$

$$\therefore x(t) = r\left[e^{i(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi)}\right]$$

$$\boxed{x(t) = B\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

(b) $x(t) = B\cos\varphi\cos(\omega_0 t) - B\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}(\omega_0 t)$

$$\boxed{x(t) = B_1\cos(\omega_0 t) + B_2\,\text{sen}(\omega_0 t)}$$

(I): $x_0 = B\cos\varphi$

$v_0 = -B\,\text{sen}\varphi\,\omega_0$

$$\therefore B = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

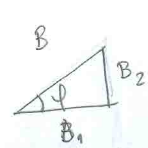
$$\tan\varphi = -\frac{v_0}{x_0\omega_0}$$

=

(II): $x_0 = B_1$

$v_0 = -B_2\omega_0 \Rightarrow B_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$

=



$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$

$$\tan\varphi = \frac{B_2}{B_1}$$

(c) $E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} m \, \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} K x(t)^2$

$x(t) = B\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = -B\omega_0 \,\text{sen}(\omega_0 t + \varphi)$

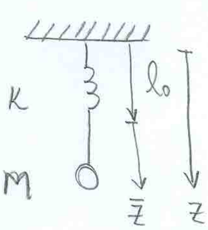
$\therefore E = \underbrace{\frac{B^2 m \omega_0^2}{2}} \text{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} K B^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$m\omega_0^2 = \cancel{m} \cdot \frac{K}{\cancel{m}}$

$E = \frac{1}{2} K B^2 \left[\text{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \right] = \frac{1}{2} K B^2$

$\boxed{E = \frac{1}{2} K \left[x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2 \right]}$ → constante em função do tempo.

2)



$z = \bar{z} + l_0$

Para a posição a partir de $\bar{z}$:

$M\ddot{\bar{z}} = -K\bar{z} + Mg \Rightarrow \boxed{\ddot{\bar{z}} + \omega_0^2 \bar{z} = g}$

$\bar{z}(t) = \bar{z}_H(t) + \bar{z}_{NH}(t)$

$$\begin{cases} \bar{z}_H(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \bar{z}_{NH}(t) \Rightarrow \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{Mg}{K} \end{cases}$$

$\boxed{\therefore z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{Mg}{K} + l_0}$

Usando as condições de contorno:

$$\begin{cases} z(0) = l_0 \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \bar{z}(0) = 0 \\ \dot{\bar{z}}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{l_0} = \frac{Mg}{K} + \cancel{l_0} + A\cos\varphi \\ -A\omega_0 \,\text{sen}\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = -\frac{Mg}{K} \\ A\,\text{sen}\varphi = 0 \end{cases}$$

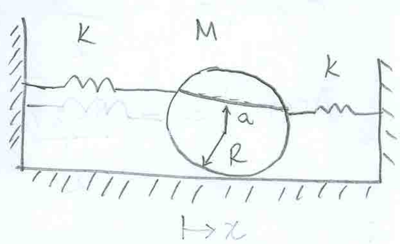
$\bar{z}(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{Mg}{k}$ L1 ②

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ A = -\frac{Mg}{k} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 = A\cos\varphi + \frac{Mg}{k} \\ -\omega_0 A \operatorname{sen}\varphi = 0 \end{cases}$$

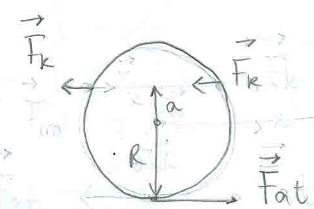
$$\therefore \bar{z}(t) = -\frac{Mg}{k}\cos(\omega_0 t) + \frac{Mg}{k} + \ell_0$$

$$\boxed{\therefore z(t) = \ell_0 + \frac{Mg}{k}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right)\right]}$$

3)



$$I = \frac{MR^2}{2}$$



$$\begin{cases} M\ddot{x} = -Kx - Kx + Fat \\ |\vec{\tau}| = I\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \end{cases}$$

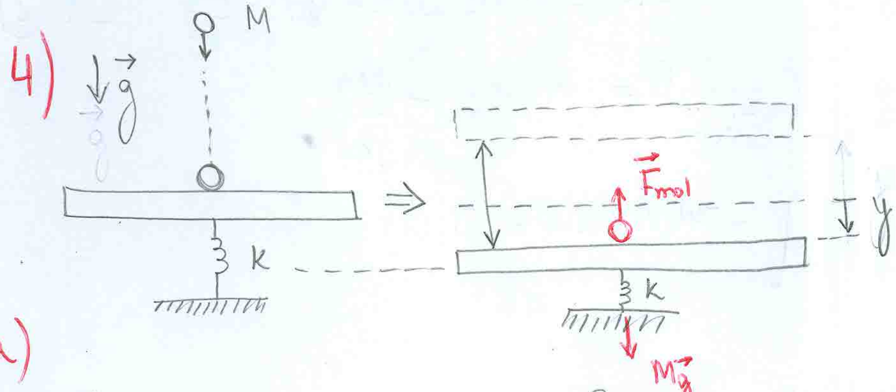
$$\begin{cases} M\ddot{x} = -2Kx + Fat \\ I\ddot{\theta} = -2Kax + RFat \end{cases} \quad \text{como: } x = R\theta$$

$$\begin{cases} M\ddot{x} + 2Kx = Fat \\ \frac{I}{R}\ddot{x} = -2Kax + MR\ddot{x} + 2KRx \end{cases}$$

$$\therefore \left(\frac{MR^{2}}{2R} - \frac{2MR}{2}\right)\ddot{x} = -2K(a+R)x \Rightarrow -\frac{MR}{2}\ddot{x} = -2K(a+R)$$

$$\frac{MR}{2}\ddot{x} = -2K(R+a) \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{4K(R+a)}{MR}x = 0} \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{4K}{M}\left(1 + \frac{a}{R}\right)}$$

4)



$$\frac{1}{2}Mv^2 = Mgh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

(a)

$$M\ddot{y} = -Ky + Mg \Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = g$$

$$y(t) = y_H(t) + y_{NH}(t) \Rightarrow \begin{cases} y_H(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ y_{NH}(t) = \dfrac{Mg}{K} \end{cases}$$

$$\therefore y(t) = \frac{Mg}{K} + A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \sqrt{2gh} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{Mg}{K} + A\cos\varphi = 0 \\ -A\omega_0 \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{2gh} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = -\dfrac{Mg}{K} \\ A\operatorname{sen}\varphi = -\dfrac{\sqrt{2gh}}{\omega_0} \end{cases}$$

$$\therefore A^2 = \left(-\frac{Mg}{K}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2gh}}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{Mg}{K}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2gh}}{\omega_0}\right)^2$$

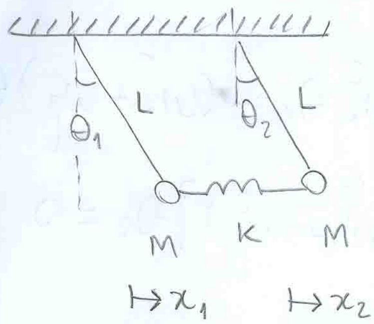
$$A^2 = \left(\frac{Mg}{K}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2gh}}{1}\right)^2 \frac{M}{K} = \left(\frac{Mg}{K}\right)^2\left(1 + 2gh\frac{\cancel{M}}{\cancel{K}}\frac{K^{\cancel{2}}}{M^{\cancel{2}}g^{\cancel{2}}}\right)$$

$$\boxed{\therefore A = \frac{Mg}{K}\left(1 + \frac{2hK}{Mg}\right)^{1/2}}$$

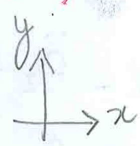
(b) $E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}K\frac{(Mg)^2}{K^2}\left(1 + \frac{2hK}{Mg}\right)$

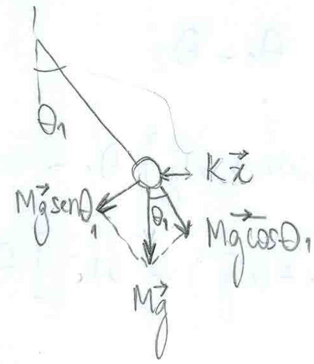
$$E = \frac{1}{2}\frac{(Mg)^2}{K} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{(Mg)^{\cancel{2}}}{\cancel{K}}\frac{\cancel{2}h\cancel{K}}{\cancel{Mg}} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}\frac{(Mg)^2}{K} + Mgh}$$

5) ⑤



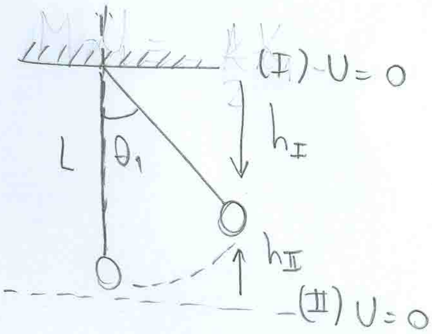
(a)





OBS: por torque:

$$\begin{cases} I\ddot{\theta}_1 = -mgL\,sen\theta_1 - KL(x_2-x_1) \\ I\ddot{\theta}_2 = -mgL\,sen\theta_2 + KL(x_2-x_1) \\ I = mL^2, \quad x_{1,2} = L\theta_{1,2} \end{cases}$$



(I): $U=0$: $U = -MgL\cos\theta_1$

(II): $U = 0$: $U = MgL(1-\cos\theta_1)$

$$U = \frac{1}{2}K(x_1-x_2)^2 + MgL(1-\cos\theta_1) + MgL(1-\cos\theta_2)$$

$$F_1 = -\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -\frac{\partial U_x}{\partial x_1} - \frac{\partial U_\theta}{\partial(L\theta_1)} = -\frac{\partial U_x}{\partial x_1} - \frac{1}{L}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta_1}$$

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 = -K(x_1-x_2) - \frac{1}{\cancel{L}}Mg\cancel{L}\,sen\theta_1 \\ M\ddot{x}_2 = +K(x_1-x_2) - \frac{1}{\cancel{L}}Mg\cancel{L}\,sen\theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_K^2(x_1-x_2) + g\,sen\theta_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 - \omega_K^2(x_1-x_2) + g\,sen\theta_2 = 0 \end{cases}$$

, como $sen\theta_j \approx \theta_j$; $j=1,2$

$x_j = L\theta_j$

$$\begin{cases} L\ddot{\theta}_1 + L\omega_K^2(\theta_1-\theta_2) + g\theta_1 = 0 \\ L\ddot{\theta}_2 - L\omega_K^2(\theta_1-\theta_2) + g\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{\theta}_1 + (\omega_K^2+\omega_g^2)\theta_1 - \omega_K^2\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 - \omega_K^2\theta_1 + (\omega_K^2+\omega_g^2)\theta_2 = 0 \end{array}}$$

(I)

(II)

$\omega_K^2 = \frac{K}{M}$, $\omega_g^2 = \frac{g}{L}$

(b) $\alpha = \theta_1 - \theta_2 \quad , \quad \beta = \theta_1 - \theta_2$

$\underline{(\mathrm{I}) - (\mathrm{II})}$: $\ddot{\theta}_1 + (\omega_k^2 + \omega_g^2)\theta_1 - \omega_k^2 \theta_2 - \ddot{\theta}_2 + \omega_k^2 \theta_1 - (\omega_k^2 + \omega_g^2)\theta_2 = 0$

$$(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \left[(\omega_k^2 + \omega_g^2) + \omega_k^2\right]\theta_1 - \left[\omega_k^2 + (\omega_k^2 + \omega_g^2)\right]\theta_2 = 0$$

$$\underbrace{(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2)}_{= \ddot{\alpha}} + (2\omega_k^2 + \omega_g^2)(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$\boxed{\ddot{\alpha} + (2\omega_k^2 + \omega_g^2)\alpha = 0}$$

$\underline{(\mathrm{I}) + (\mathrm{II})}$: $\ddot{\theta}_1 + (\omega_k^2 + \omega_g^2)\theta_1 - \omega_k^2 \theta_2 + \ddot{\theta}_2 - \omega_k^2 \theta_1 + (\omega_k^2 + \omega_g^2)\theta_2 = 0$

$$(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \left[(\cancel{\omega_k^2} + \omega_g^2) - \cancel{\omega_k^2}\right]\theta_1 + \left[(\cancel{\omega_k^2} + \omega_g^2) - \cancel{\omega_k^2}\right]\theta_2 = 0$$

$$\boxed{\ddot{\beta} + \omega_g^2 \beta = 0}$$

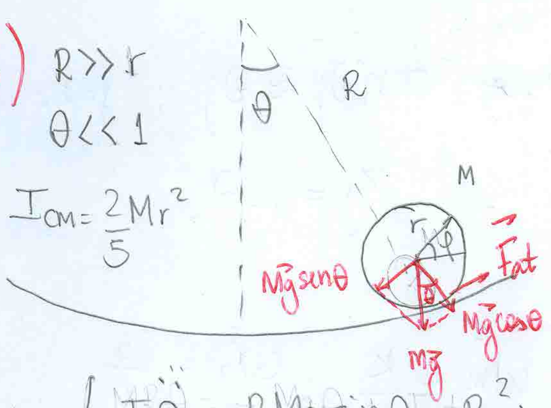
(c) $\omega_\alpha^2 = 2\omega_k^2 + \omega_g^2 = \frac{2k}{M} + \frac{g}{L} \Rightarrow \boxed{\omega_\alpha = \left(\frac{2k}{M} + \frac{g}{L}\right)^{1/2}}$

$\omega_\beta^2 = \omega_g^2 \Rightarrow \boxed{\omega_\beta = \left(\frac{g}{L}\right)^{1/2}}$

6) $R >> r$

$\theta << 1$

$I_{cm} = \frac{2}{5} M r^2$



$$\begin{cases} I\ddot{\theta} = -MgR\sin\theta + R\,F_{at} \\ I_{cm}\ddot{\varphi} = r\,F_{at} \end{cases} \text{(torque na bola)}$$

Como rola s/ deslizar: $\begin{cases} x_\varphi = -r\varphi \\ x_\theta = R\theta \end{cases} \Rightarrow x_\varphi = x_\theta \;\; \hookrightarrow \varphi = -\frac{R}{r}\theta$

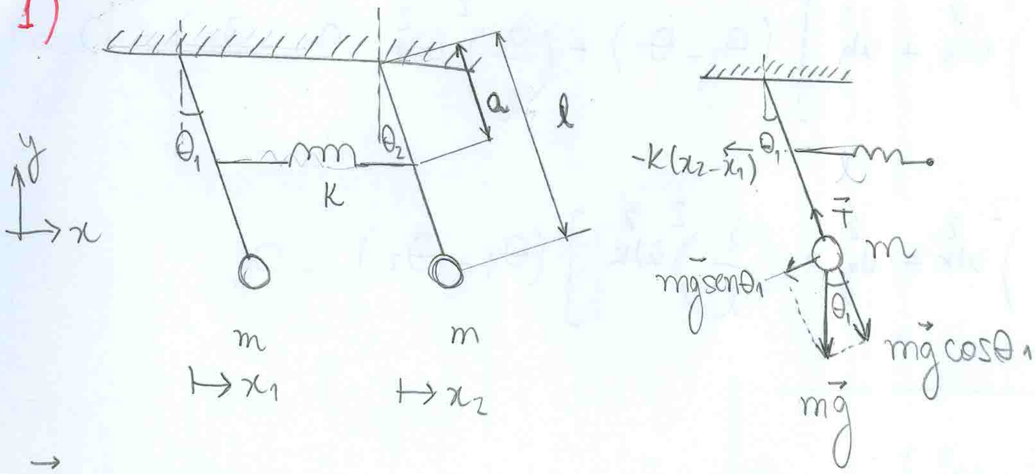
$\left\{ I_{cm}\left(-\frac{R}{r}\right)\ddot{\theta} \Rightarrow r\,F_{at} \right. \qquad (\sin\theta \approx \theta)$

$$\therefore \left\{ I\ddot{\theta} = -RMg\sin\theta - \left(\frac{R^2}{r^2}\right) I_{cm}\ddot{\theta} \Rightarrow \Big(\underbrace{I + \left(\frac{R}{r}\right)^2 I_{cm}}_{\beta}\Big)\ddot{\theta} = -MgR\theta \right.$$

$$\beta = \frac{2}{5}Mr^2 + MR^2 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{2}{5}M r^2 = \frac{2}{5}Mr^2 + \frac{7}{5}MR^2 = \frac{MR^2}{5}\left[2\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 7\right] \underset{(R>>r)}{\approx} \frac{7MR^2}{5} \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{5g}{7R}}$$

Exercícios Extras:

1)



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\alpha}$$

$$\therefore \begin{cases} I\ddot{\theta}_1 = -K(x_2-x_1)a - mg\ell\, sen\theta_1 \\ I\ddot{\theta}_2 = +K(x_2-x_1)a - mg\ell\, sen\theta_2 \end{cases}$$

como $x_j = a\theta_j$, para $j = 1, 2$, $sen\theta_j \approx \theta_j$ e $I = m\ell^2$

$$\begin{cases} m\ell^2\ddot{\theta}_1 = -K(\theta_2-\theta_1)a^2 - mg\ell\theta_1 \\ m\ell^2\ddot{\theta}_2 = K(\theta_2-\theta_1)a^2 - mg\ell\theta_2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left[\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\frac{K}{m} + \frac{g}{\ell}\right]\theta_1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2\frac{K}{m}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{a}{\ell}\right)^2\frac{K}{m}\theta_1 + \left[\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\frac{K}{m} + \frac{g}{\ell}\right]\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Definindo: $\omega_K^2 = \frac{K}{m}$ e $\omega_g^2 = g/\ell$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left[\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\omega_K^2 + \omega_g^2\right]\theta_1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2\omega_K^2 = 0 \quad (I) \\ \ddot{\theta}_2 + \left[\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\omega_K^2 + \omega_g^2\right]\theta_2 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2\omega_K^2\theta_1 = 0 \quad (II) \end{cases}$$

fazendo: (I) - (II) : $\theta_1 - \theta_2 = \alpha$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \left[\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \omega_k^2 + \omega_g^2\right](\theta_1 - \theta_2) + \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \omega_k^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$\underbrace{(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2)}_{\ddot{\alpha}} + \left[\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \omega_k^2 + \omega_g^2 + \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \omega_k^2\right](\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \left[2\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \omega_k^2 + \omega_g^2\right]\alpha = 0}$$

fazendo: (I) + (II) : $\theta_1 + \theta_2 = \beta$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

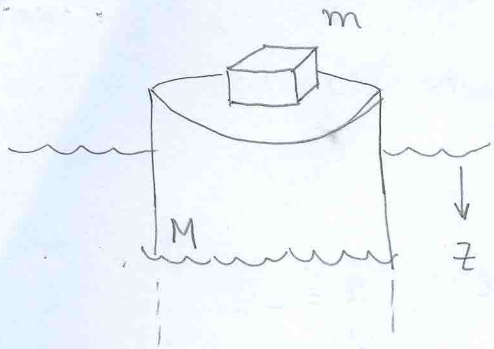
$$(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \left[\cancel{\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \omega_k^2} + \omega_g^2\right](\theta_1 + \theta_2) - \cancel{\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \omega_k^2 (\theta_1 + \theta_2)} = 0$$

$$\underbrace{(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)}_{\ddot{\beta}} + \omega_g^2 (\theta_1 + \theta_2) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\beta} + \omega_g^2 \beta = 0}$$

Assim, as frequencias são: $\boxed{\omega_\alpha = \sqrt{2\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \frac{k}{m} + \frac{g}{\ell}}}$ //

$$\boxed{\omega_\beta = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$ //

2) Uma bóia de massa M cilíndrica e de secção transversal A bóia. Um pássaro de massa m senta e depois decola. Qual é frequência de oscilação e qual a eq. do movimento?



L1 5

No equilíbrio: $\vec{E} = \vec{P}$

$$\rho_{H_2O} V_d \vec{g} = (m+M)\vec{g}$$

$$\rho_{H_2O} A \cancel{\vec{g}} z_0 = (M+m)\cancel{\vec{g}} \Rightarrow z_0 = \frac{M+m}{\rho_{H_2O} A}$$

Após o pássaro voar a boia oscila:

$$M\ddot{z} = -\rho_{H_2O} A g z + Mg \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\rho_{H_2O} A g}{M} z = g$$

$$\omega_0^2 = \frac{\rho_{H_2O} A g}{M}$$

$$z(t) = B\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{M\cancel{g}}{\rho_{H_2O} A \cancel{g}} + B\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

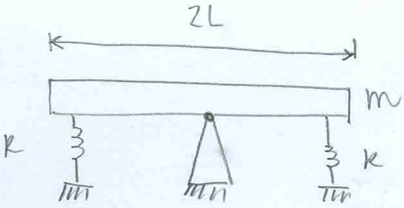
$$z(0) = z_0 = \frac{m+\cancel{M}}{\rho_{H_2O} A} = \cancel{\frac{M}{\rho_{H_2O} A}} + B\cos(\cancel{\omega_0 t} + \varphi)$$

$$\dot{z}(0) = 0 = -B\omega_0 \operatorname{sen}\varphi \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\therefore B = \frac{m}{\rho_{H_2O} A} \Rightarrow z(t) = \frac{M}{\rho A} + \frac{m}{\rho A}\cos(\omega_0 t)$$

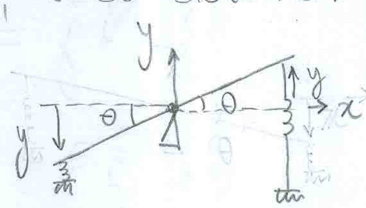
$$\boxed{z(t) = \frac{1}{\rho A}\left[M + m\cos(\omega_0 t)\right]}$$

3) (ex7 zílio)



Calcule a frequência para pequenas oscilações do sistema.

$$I = \frac{1}{3} m L^2$$

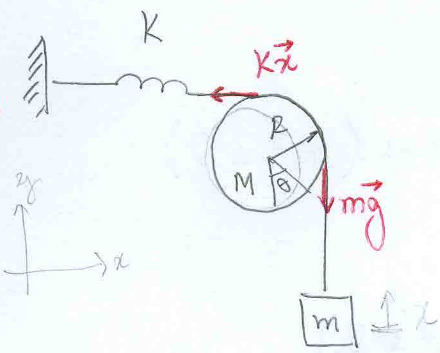


$, \; y = L\theta$

$$|\vec{\tau}| = I\ddot{\theta} \Rightarrow I\ddot{\theta} = (-Ky)L + Ky(-L) = -2KLy$$

$$\frac{1}{3} m \cancel{L^2} \ddot{\theta} = -2K\cancel{L^2}\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{6K}{m}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{6K}{m}}$$

4) (ex9 zílio)



Calcule a frequência do sistema.

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \quad , \quad x = R\theta$$

Torque: $I\ddot{\theta} = mgR - KxR$

$$\frac{1}{2} M R^2 \ddot{\theta} = mgR - KR^2\theta \Rightarrow \frac{1}{2} M R^2 \ddot{\theta} + KR^2\theta = mgR$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2K}{M}\theta = \frac{2mg}{MR}} \qquad \boxed{\omega_0^2 = \frac{2K}{M}}$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{mg}{KR} + A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

5) (ex5 zílio)

$x_1(t) = A\cos(\omega t)$ $\qquad x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$x_2(t) = A\cos[(\omega + \Delta\omega)t]$ $\qquad x(t) = A\{\cos(\omega t) + \cos[(\omega + \Delta\omega)t]\}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ $\Rightarrow \cos\theta + \cos\varphi = 2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$

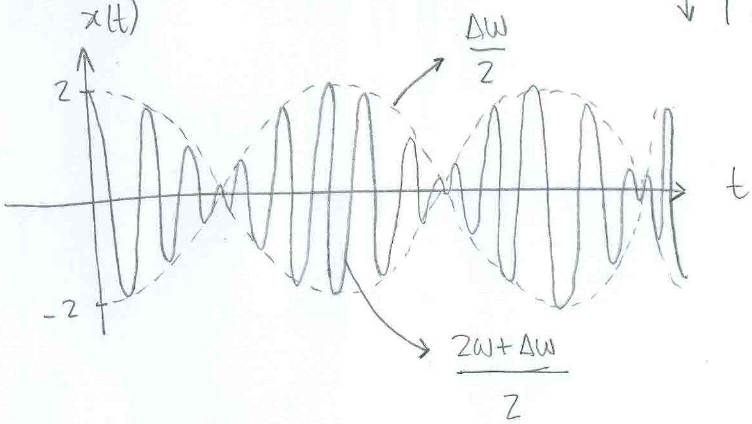
L1 6

$$\theta + \varphi = \omega t + \omega t + \Delta\omega t = (2\omega + \Delta\omega)t$$

$$\boxed{\therefore x(t) = 2A\cos\left[(2\omega+\Delta\omega)\frac{t}{2}\right]\cos\left(\Delta\omega\frac{t}{2}\right)}$$

$\begin{cases} \omega = 10 \text{ rad/s} \\ \Delta\omega = 9{,}8 \text{ rad/s} \end{cases}$

$A = 1$ m



$\downarrow T = \frac{2\pi}{\omega \uparrow}$